Dilatations d'opérateurs et projections L^p

Vidal AGNIEL

Laboratoire Paul Painlevé, Villeneuve d'Ascq

Soutenance de thèse
Lundi 08 Mars 2021

Contexte historique : Théorème de dilatation de Nagy (1953)

Soit H un espace de Hilbert, et T un opérateur sur H. On a l'équivalence entre :

(i) $\|T\| \leq 1$;

(ii) Il existe un Hilbert K et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(K)$ avec $H \subset K$ tels que

$$T^n = P_H U^n|_H \text{ pour tout } n \geq 1,$$

où $P_H \in \mathcal{L}(K)$ désigne la projection orthogonale sur H.

Cela a motivé l'introduction des classes C_ρ par B. Sz-Nagy et C. Foias, en 1966.

Définition : Classe C_ρ

Soit H un espace de Hilbert complexe, et $\rho > 0$. On définit la classe

$$\begin{aligned} C_\rho(H) := \{T \in \mathcal{L}(H) : \text{ il existe un Hilbert } K \text{ et un opérateur unitaire } U \in \mathcal{L}(K) \\ \text{avec } H \subset K \text{ tels que } T^n = \rho P_H U^n|_H,\ \forall n \geq 1\}, \end{aligned}$$

où $P_H \in \mathcal{L}(K)$ désigne la projection orthogonale sur H.

Propriétés des classes C_ρ

Soit $\rho > 0$ et T un opérateur dans C_ρ. Alors :

(i) T est à puissances bornées, avec $\|T^n\| \leq \max(1, \rho)\ \forall n \geq 0$.

(ii) T^k est dans $C_\rho(H)$, pour tout $k \geq 1$.

(iii) L'application de calcul fonctionnel $f \mapsto f(T)$ qui envoie un polynôme P sur $P(T)$ peut être étendue à l'algèbre du disque $\mathbb{A}(\mathbb{D}) := C^0(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ en un morphisme d'algèbres de Banach,avec

$$\|f(T)\| \leq \max(1, \rho)\|f\|_{L^\infty(\mathbb{D})}.$$

(iv) T est semblable à une contraction : il existe $L \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|LTL^{-1}\| \leq 1$.

L'étude des classes C_ρ a notamment su se faire plus aisément à l'aide de la quantité suivante.

Définition : ρ-rayon

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\rho > 0$. Le *ρ-rayon* de T est défini comme :

$$w_\rho(T) := \inf\{u > 0 : \frac{T}{u} \in C_\rho(H)\} \in [0, +\infty].$$

Proposition : Propriétés du ρ-rayon

Soit $\rho > 0$. Alors la fonction $T \mapsto w_\rho(T)$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$, est une quasi-norme, est equivalente comme quasi-norme à la norme $\|\cdot\|$, et sa boule unité fermée est la classe C_ρ.
De plus, à T fixé, la fonction $\rho \mapsto w_\rho(T)$ est continue, décroissante, log-convexe, et de limite $r(T)$ en $+\infty$.

Quelques relations et inégalités avec le ρ-rayon

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\rho > 0$. On a :

(i) $w_1(T) = \|T\|$;

(ii) $w_2(T) = w(T) := \sup_{\|x\|=1}(|\langle Tx, x\rangle|)$ (rayon numérique) ;

(iii) $w_\rho(T^n) \leq w_\rho(T)^n$, pour tout $n \geq 1$;

(iv) $\rho w_\rho(T) \geq \|T\|$.

Je me suis intéressé à une généralisation des classes C_ρ.

Définition : Classe $C_{(\rho_n)}$

Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes non-nuls. Soit H un espace de Hilbert complexe. On définit la classe

$$C_{(\rho_n)}(H) := \{T \in \mathcal{L}(H) : \text{ il existe un Hilbert } K \text{ et un opérateur unitaire } U \in \mathcal{L}(K) \text{ avec } H \subset K \text{ tels que } T^n = \rho_n P_H U^n|_H, \forall n \geq 1\}.$$

On abrègera pour la suite $C_{(\rho_n)}(H)$ en $C_{(\rho_n)}$.

Remarques

Si un opérateur T est dans la classe $C_{(\rho_n)}$, on a alors $\|T^n\| \leq |\rho_n|$, pour tout $n \geq 1$.
Cela implique que $r(T) \leq \liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}})$.
Si $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) = 0$, la classe $C_{(\rho_n)}$ ne contient alors que des opérateurs quasi-nilpotents dont la norme des puissances décroit suffisamment vite vers 0.
Ainsi, dans la suite de cet exposé, on ne s'intéressera qu'au cas où $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) > 0$.

Proposition

Soit $(\rho_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ avec $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) > 0$. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On a l'équivalence :

(i) $T \in C_{(\rho_n)}$;

(ii) $r(T) \leq \liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}})$ et, pour $f_{(\rho_n)}(zT) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\rho_n} z^n T^n$, on a

$$I + \mathrm{Re}(f_{(\rho_n)}(zT)) \geq 0, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Remarque : La série entière $f_{(\rho_n)}(w) = \sum_{n \geq 1} \frac{2w^n}{\rho_n}$ a pour rayon de convergence $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}})$.

Exemples

- On peut ainsi vérifier que $0 \in C_{(\rho_n)}$.
- Les classes $C_{(\rho_n)}$ sont fermées dans $\mathcal{L}(H)$.
- L'opérateur identité I appartient à $C_{(\rho_n)}$ si et seulement si $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) \geq 1$ et $Re(f_{(\rho_n)}(w)) \geq 1$ pour tout $w \in \mathbb{D}$. (condition uniquement sur $f_{(\rho_n)}$)
- On a $T \in C_{(\rho_n)}$ si et seulement si $T^* \in C_{(\overline{\rho_n})}$.

L'étude des classes $C_{(\rho_n)}$ repose grandement sur la quantité suivante.

Définition : (ρ_n)-rayon

Soit H un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$, et $(\rho_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$. Le (ρ_n)-*rayon* de T est défini comme :

$$w_{(\rho_n)}(T) := \inf\{u > 0 : \frac{T}{u} \in C_{(\rho_n)}(H)\} \in [0, +\infty].$$

Proposition : Propriétés du (ρ_n)-rayon

Soit $(\rho_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ avec $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) > 0$. Alors la fonction $T \mapsto w_{(\rho_n)}(T)$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$, est une quasi-norme, est equivalente comme quasi-norme à la norme d'opérateur$\|\cdot\|$, et sa boule unité fermée est la classe $C_{(\rho_n)}$.
On a de plus :

$$w_{(\rho_n)}(T) \geq \left(\frac{\|T^m\|}{|\rho_m|}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ pour tout } m \geq 1, \text{ et } w_{(\rho_n)}(T) \geq \frac{r(T)}{\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}})}.$$

Proposition : Manipulations avec le (ρ_n)-rayon

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $(\rho_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ avec $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) > 0$. Alors :

(i) Pour tout $z \neq 0$, on a $\frac{1}{|z|} w_{(\rho_n)}(T) = w_{(\rho_n)}(\frac{1}{z} T) = w_{(z^n \rho_n)}(T)$.

(ii) Pour tout $k \geq 1$, on a $w_{(\rho_{kn})_n}(T^k) \leq w_{(\rho_n)}(T)^k$.

(iii) $w_{(\rho_n)}(T) = w_{(\overline{\rho_n})}(T^*)$.

(iv) Pour F un sous-espace fermé stable par T, $w_{(\rho_n)}(T|_F) \leq w_{(\rho_n)}(T)$.

(v) Pour toute isométrie V on a $w_{(\rho_n)}(VTV^*) \leq w_{(\rho_n)}(T)$, avec égalité si V est unitaire.

(vi) Pour un Hilbert K on a $w_{(\rho_n)}(T \otimes I_K) = w_{(\rho_n)}(T)$.

(vii) Pour $T_m \in \mathcal{L}(H_m)$ avec $\sup_m(\|T_m\|) < +\infty$, on a

$$w_{(\rho_n)}(\oplus_{m\geq 1} T_m) = \sup_{m\geq 1}(w_{(\rho_n)}(T_m)).$$

(viii) $w_{(\rho_n)}(I) = \min(\{r \geq \liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} : f_{(\rho_n)}(\mathbb{D}(0, \frac{1}{r})) \subset Re_{\geq -1}\})$.

(ix) On a $w_{(\rho_n)}(T) \geq r(T) w_{(\rho_n)}(I)$.

(x) Si T est normal, alors $w_{(\rho_n)}(T) = \|T\| w_{(\rho_n)}(I)$.

Avec la proposition précédente, le (ρ_n)-rayon fait en particulier partie de la famille des rayons admissibles. Ainsi, on obtient entre autres l'application suivante.

Application

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ nilpotent d'ordre n, pour $n \geq 2$, avec $\|T\| \leq 1$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$w_{(\rho_n)}(P(T)) \leq w_{(\rho_n)}(P(S_n)).$$

Où S_n est le bloc de Jordan nilpotent de taille n : $S_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition : Classes $C_{(\rho)}$

Pour $\rho \in \mathbb{C}^*$, on s'intéresse à la classe $C_{(\rho)}$, associée à la suite constante égale à ρ. Cela constitue une généralisation des classes C_τ, $\tau > 0$, qui en est plus proche, et partage ainsi plus de propriéés.

Proposition : Caractérisations de l'appartenance à la classe $C_{(\rho)}$

Soient $\rho \neq 0$ et $T \in \mathcal{L}(H)$. On a les équivalences :

(i) $w_{(\rho)}(T) \leq 1$;

(ii) $r(T) \leq 1$ et $\mathrm{Re}((1 - \frac{2}{\rho})I + \frac{2}{\rho}(I - zT)^{-1}) \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$;

(iii) $r(T) \leq 1$ et $\mathrm{Re}(\frac{2}{\rho}(I - zT)) + \mathrm{Re}(1 - \frac{2}{\rho}) \cdot (I - zT)^*(I - zT) \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$;

(iv) $\mathrm{Re}(\frac{2}{\rho}(I - zT)) + \mathrm{Re}(1 - \frac{2}{\rho}) \cdot (I - zT)^*(I - zT) \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$;

(v) $((\rho - 1)zT - \rho I)$ est inversible et $\|(zT)((\rho - 1)zT - \rho I)^{-1}\| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$;

(vi) $\|T(h)\| \leq \|(\rho - 1)T(h) - \rho w h\|$, $\forall h \in H$, $\forall |w| > 1$.

Dans le cadre des classes C_ρ, $\rho > 0$, on connaissait le résultat de symétrie suivant.

Théorème

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Pour $0 < \rho < 2$, on a :

$$\rho w_\rho(T) = (2-\rho) w_{2-\rho}(T).$$

La caractérisation précédente ($(i) \Leftrightarrow (v)$) permet d'obtenir le résultat suivant, qui donne un autre point de vue à cette symétrie du ρ-rayon.

Théorème

Soient $\rho \neq 0$ et $T \in \mathcal{L}(H)$. On a :

$$|\rho| w_{(\rho)}(T) = (1 + |\rho - 1|) w_{1+|\rho-1|}(T).$$

Ainsi, la fonction $\rho \in \mathbb{C}^* \mapsto |\rho| w_{(\rho)}(T)$ est constante sur les cercles de centre 1, est continue sur $\mathbb{C}^*$, et peut être étendue continûment à $2w_{(2)}(T)$ en 0.

Applications

Grâce à la relation précédente, on sait immédiatement que le calcul du ρ-rayon pour un ρ complexe se ramène à celui d'un τ-rayon réel strictement positif.
On a de plus $C_{(\rho)} = \frac{1+|\rho-1|}{|\rho|} C_{1+|\rho-1|}$, ce qui donne une description des classes $C_{(\rho)}$ se ramenant au cas réel positif via une certaine homothétie.
Cette relation permet de manipuler des quantités complexes, et éventuellement de l'holomorphie, tout en ramenant si besoin un calcul au cas réel positif.

On peut aussi généraliser des calculs de ρ-rayons d'opérateurs simples à tout $\rho \neq 0$.

Calculs de ρ-rayons élémentaires

Soient $\rho \neq 0$ et $T \in \mathcal{L}(H)$. On a :

(i) $w_\rho(I) = \frac{1+|\rho-1|}{|\rho|}$,

(ii) Si T est nilpotent d'ordre 2, alors $w_\rho(T) = \frac{\|T\|}{|\rho|}$.

Proposition : Détermination du ρ-rayon d'une matrice 2x2

Soient $\rho \geq 1$, $a, b, c \in \mathbb{C}$. Pour $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on a :

(i) $w_\rho(T)$ est le plus grand $r > 0$ pour lequel il existe un réel $t \in [0, 2\pi[$ avec

$$|c|^2 r^2 = [(\rho-2)|a|^2 - 2(\rho-1)r\mathrm{Re}(ae^{it}) + \rho r^2][(\rho-2)|b|^2 - 2(\rho-1)r\mathrm{Re}(be^{it}) + \rho r^2].$$

(ii) Pour $\rho = 2$, on a :

$$w_2(T) = \max_{t \in [0,2\pi[} \frac{\mathrm{Re}((a+b)e^{it}) + \sqrt{\mathrm{Re}((a-b)e^{it})^2 + |c|^2}}{2}.$$

Cela permet d'obtenir des calculs explicites de ρ-rayons, en fonction du rayon numérique w_2, pour davantage d'opérateurs.

Application

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\rho \geq 1$. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.

- Si $T^2 + cT + 0 = 0$, alors $\rho w_\rho(T) = w_2(T) + |c|(\rho - 2) + \sqrt{w_2(T)^2 + 0}$;
- Si $T^2 + 0 + bI = 0$, alors $\rho w_{(\rho)}(T) = w_2(T) + 0 + \sqrt{w_2(T)^2 + |b|\rho(\rho-2)}$;
- Si $T^2 + 2aT + a^2 I = 0$, alors
  $\rho w_\rho(T) = w_2(T) + |a|(\rho - 2) + \sqrt{(w_2(T) + |a|(\rho-2))^2 - |a|^2\rho(\rho-2)}$.

Etude via des familles à 1 paramètre

Pour mieux comprendre le comportement des rayons associés à ces classes d'opérateurs, on peut regarder ceux-ci comme des familles à 1 paramètre en considérant la fonction $z \mapsto w_{(z\rho_n)}$ (sur $\mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$).

Proposition : Comportements du $(z\rho_n)$-rayon

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $(\rho_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ avec $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) > 0$.

(i) Pour tous $z \neq 0$, on a :

$$\frac{|z|}{1+|z-1|} w_{(z\rho_n)}(T) \leq w_{(\rho_n)}(T) \leq w_{(z\rho_n)}(T)(|z|+|z-1|).$$

(ii) La fonction $z \mapsto w_{(z\rho_n)}(T)$ est uniformément continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0,\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Cette fonction tend vers $+\infty$ quand $|z| \to 0$, et vers $\frac{r(T)}{\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}})}$ quand $|z| \to +\infty$;

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $r \mapsto w_{(re^{it}\rho_n)}(T)$ est décroissante et log-convexe sur $]0,+\infty[$.

On sait que les classes C_ρ ne contiennent que des opérateurs semblables à des contractions. Pour les classes $C_{(\rho_n)}$ cela peut ou non être le cas.

Proposition

Soit $(\rho_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ avec $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) > 0$. Si l'une des assertions suivantes est vraie

(i) $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) < 1$;

(ii) $|\rho_n| < 1$ pour un $n \geq 1$;

(iii) $w_{(\rho_n)}(I) > 1$;

(iv) $\rho_n = M + x_n$, $(x_n)_n \in \ell_2(\mathbb{C})$,

alors tous les opérateurs dans $C_{(\rho_n)}(H)$ sont semblables à des contractions.
Si, à l'opposé, l'on a :

(i') $w_{(\rho_n)}(I) < 1$,

alors $C_{(\rho_n)}(H)$ contient des opérateurs qui ne sont pas semblables à des contractions.
- Ces résultats restent vrais si ces assertions sont vérifiées par une sous-suite de la forme $(\rho_{kn})_n$, pour un $k \geq 1$.

Le cas principalement indéterminé reste le cas où $w_{(\rho_n)}(I) = 1$.

Voici quelques exemples autour de comportements possibles du $(z\rho_n)$-rayon et de la réunion des classes $C_{(z\rho_n)}$ qui diffèrent du cas $\rho_n = \rho$.

Proposition

Soit $a = (a_n)_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|} \leq 1$. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On définit

$$\rho_n := \begin{cases} 2a_n\|T^n\| \text{ si } T^n \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

(i) Si $r(T) > 0$ ou si T est nilpotent, alors $T \in C_{(\rho_n)}$.

(ii) Si $r(T) > 0$ et $\liminf_n(|a_n|^{\frac{1}{n}}) = 1$, alors $w_{(z_n\rho_n)}(T) = 1$, pour tous z_n tels que $|z_n| \geq 1$ et $\lim_n(|z_n|^{\frac{1}{n}}) = 1$.
En particulier, $w_{(z\rho_n)}(T) = 1$ pour tout $|z| \geq 1$.

Proposition

Soit $(\rho_n)_n$ avec $\liminf_n(|\rho_n|^{\frac{1}{n}}) = 1$. On a :

(i) Si $(\frac{1}{\rho_n}) \in \ell^1$, alors $\bigcup_{r>0} C_{(r\rho_n)}$ contient tous les opérateurs à puissances bornées.

(ii) Si $f_{(\rho_n)} \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f'_{(\rho_n)} \in H^\infty(\mathbb{D})$, alors $\bigcup_{r>0} C_{(r\rho_n)}$ contient un opérateur qui n'est pas à puissances bornées.

(iii) Si $n^{k+1+\varepsilon} = O(|\rho_n|)$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$ et un $\varepsilon > 0$, alors $\bigcup_{r>0} C_{(r\rho_n)}$ contient tous les opérateurs T tels que $\|T^n\| = O(n^k)$.

Exemple de calcul de $w_{(z\rho_n)}(I)$

Soient $R > 0$ et $-\pi < t \leq \pi$. Pour $\rho_n = n$ et $z = Re^{it}$, on a :

(i) $I + f_{(Re^{it}n)}(zI) = I - \frac{2}{Re^{it}} \log(1 - zI)$;

(ii) $w_{(Re^{it}n)}(I) = 1$ si $t = 0$ et $R \geq 2\log(2)$;

(iii) $w_{(Re^{it}n)}(I) = 1$ si $t = \pm\frac{\pi}{2}$ et $R \geq \pi$;

(iv) $w_{(Re^{it}n)}(I) = 1$ si $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$ et $R \geq 2\cos(t)\log(2\cos(t)) + 2\sin(t)t$;

(v) $w_{(Re^{it}n)}(I) = \frac{1}{\exp(\frac{R}{2})-1} > 1$ si $t = 0$ et $0 < R < 2\log(2)$;

(vi) $w_{(Re^{it}n)}(I) = \frac{1}{1-\exp(\frac{-R}{2})} > 1$ si $t = \pi$;

(vii) $w_{(Re^{it}n)}(I) = \frac{1}{\sin(\frac{R}{2})}$ si $t = \pm\frac{\pi}{2}$ et $0 < R < \pi$;

(viii) Pour $(0 < |t| < \frac{\pi}{2}$ et $0 < R < 2\cos(t)\log(2\cos(t)) + 2\sin(t)t)$ ou $\frac{\pi}{2} < |t| < \pi$, on a $w_{(Re^{it}n)}(I) = \inf(\{u > 1 : 1 - \frac{2}{R}g_t(u) \geq 0\} > 1$ avec $g_t(u) := \cos(t)\log(\frac{\sqrt{u^2-\sin(t)^2}+\cos(t)}{u}) + \arcsin(\frac{\sin(t)}{u})\sin(t)$.

Définition : L^p-projections

Soit X un espace de Banach complexe, et $1 \leq p \leq +\infty$.
Une projection P ($P^2 = P$) sur X est une L^p-projection si elle vérifie :

$$\|f\|_X = \|\left(\|P(f)\|_X, \|(I-P)(f)\|_X\right)\|_p, \text{ pour tous } f \in X.$$

Cette condition est équivalente à :

$$\begin{cases} \|g+h\|^p = \|g\|^p + \|h\|^p, \ \forall g \in Im(P),\ h \in Ker(P) & \text{lorsque } 1 \leq p < +\infty. \\ \|g+h\| = \max(\|g\|, \|h\|), \ \forall g \in Im(P),\ h \in Ker(P) & \text{lorsque } p = +\infty. \end{cases}$$

On définit alors $\mathcal{P}_p(X)$ l'ensemble des L^p-projections sur X.

Les L^p-projections sont une version L^p des projections orthogonales. Elles ont été introduites en 1953 par Cunningham.
Elles ont été principalement étudiées sur des espaces de Banach réels. Les résultats présentés ici concernent les espaces de Banach complexes. Ceux-ci restent vrais dans le cadre réel, à quelques exceptions près lorsque $p = 1$ ou $+\infty$.

Exemple fondamental

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $1 \leq p \leq +\infty$.
Pour $A \in \mathcal{F}$, $P = M_{\chi_A} : f \mapsto f\chi_A$ est une L^p-projection sur $L^p(\Omega)$.

Théorème : Caractérisation des L^p-projections sur $L^p(\Omega)$, $p \neq 2, +\infty$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2, +\infty$.
Pour tout $P \in \mathcal{P}_p(L^p(\Omega))$ on a alors $P = M_{\chi_A}$, avec $A \in \Omega$ tel que $A \cap B \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{F}$ de mesure finie.

Cela découle principalement du cas d'égalité des inégalités de Clarkson sur L^p :
$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p = 2(\|f\|^p + \|g\|^p)$ ssi f et g sont à support disjoint.

Exemple fondamental

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $1 \leq p \leq +\infty$.
Pour $A \in \mathcal{F}$, $P = M_{\chi_A} : f \mapsto f\chi_A$ est une L^p-projection sur $L^p(\Omega)$.

Théorème : Caractérisation des L^p-projections sur $L^p(\Omega)$, $p \neq 2, +\infty$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2, +\infty$.
Pour tout $P \in \mathcal{P}_p(L^p(\Omega))$ on a alors $P = M_{\chi_A}$, avec $A \in \Omega$ tel que $A \cap B \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{F}$ de mesure finie.

Cela découle principalement du cas d'égalité des inégalités de Clarkson sur L^p :
$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p = 2(\|f\|^p + \|g\|^p)$ ssi f et g sont à support disjoint.

Théorème : Propriétés des L^p-projections

Soit X un espace de Banach, et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2$. On a alors :

(i) Tous les éléments de $\mathcal{P}_p(X)$ commutent deux à deux.

(ii) L'ensemble $\mathcal{P}_p(X)$ est une algèbre de boole commutative pour les opérations $(P, Q) \mapsto PQ$, $(P, Q) \mapsto P + Q - PQ$, $P \mapsto (I - P)$ ("Et", "Ou", "Non").

(iii) La relation $P \leq Q \;\Leftrightarrow\; PQ = P$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_p(X)$.

(iv) Si $p \neq +\infty$, toute famille totalement ordonnée $(P_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{P}_p(X)$ admet un inf $P = \inf_{i \in I}(P_i)$, vers lequel elle converge ponctuellement.

(v) Si $p \neq +\infty$, l'algèbre de Boole $\mathcal{P}_p(X)$ est complète pour $\leq$: Tout sous-ensemble $\{P_i,\ i \in I\}$ admet un infimum $\inf_{i \in I}(P_i)$ dans $\mathcal{P}_p(X)$. De plus, $Im(\inf_{i \in I}(P_i)) = \bigcap_{i \in I} Im(P_i)$.

Théorème : Etude des L^p-projections sur X

Soit X un espace de Banach, et $1 \leq p, q \leq +\infty$, $p \neq q$. Alors au moins l'un des deux ensembles $\mathcal{P}_p(X)$ ou $\mathcal{P}_q(X)$ est réduit à $\{0, I\}$.
Ce résultat reste vrai pour un Banach réel Y, sauf si Y est isométriquement isomorphe à $l_1(\mathbb{R}^2) \simeq l_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Définition : p-orthogonalité entre vecteurs

Soit X un espace de Banach, et $1 \leq p \leq +\infty$. Soient $f, g \in X$. Les vecteurs f et g sont p-orthogonaux, noté $f \perp_p g$, si

$$\begin{cases} \|f + zg\|^p = \|f\|^p + |z|^p \|g\|^p, \ \forall z \in \mathbb{C}, \text{ lorsque } p < +\infty; \\ \|f + zg\| = \max(\|f\|, |z|\|g\|), \ \forall z \in \mathbb{C}, \text{ lorsque } p = +\infty. \end{cases}$$

Si $f, g \neq 0$, cette condition est équivalente au fait que $Vect(f, g)$ soit de dimension 2 et que la projection sur $Vect(f)$ parallèlement à $Vect(g)$ soit une L^p-projection sur $Vect(f, g)$.

La relation de p-orthogonalité est symétrique, homogène, et définie, comme la relation d'orthogonalité.
Elle n'est cependant pas forcément linéaire : $f \perp_p g$ et $f \perp_p h$ n'implique pas $f \perp_p (g + h)$.

Définition : p-orthogonal d'un ensemble

Soit E une partie de X. On définit $E^{\perp_p} := \{x \in X \text{ tq } x \perp_p y, \ \forall y \in E\}$ le p-orthogonal de E.
$E^{\perp_p}$ est un fermé et n'est pas forcément un sous-ev de X. Les p-orthogonaux se comportent de la même façon que les orthogonaux pour un Hilbert/dual par rapport à l'inclusion d'ensembles.

Proposition : p-orthogonalité sur $L^p(\Omega)$, $p \neq 2, +\infty$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2, +\infty$. Pour $f, g \in L^p(\Omega)$ on a $f \perp_p g$ si et seulement si f et g sont à support disjoint.

Résultat : Caractérisation de la ∞-orthogonalité sur L^∞

Soit $f \in L_\infty(\Omega)$, $f \neq 0$. On a

(i) $f^{\perp_\infty} = \{g : |g(x)| \leq \frac{\|f\| - |f(x)|}{\|f\|} \|g\|, \forall_{p.p.} x \in \Omega\} = \{g \neq 0 : \frac{|g|}{\|g\|} + \frac{|f|}{\|f\|} \leq_{p.p.} 1\} \cup \{0\}$;

(ii) On a $f^{\perp_\infty} = \{0\}$ si et seulement si $\|\|\|f\| - |f|\|\| < \|f\|$.
Lorsque $\Omega = \{1, .., n\}$, cela est équivalent à $|f(i)| \neq 0$ pour tout $i \in \Omega$.
Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, cela est équivalent au fait que 0 ne soit pas dans l'adhérence de $\{f(n),\ n \geq 0\}$;

(iii) $f^{\perp_\infty}$ est un sous-ev non-nul si et seulement si $|f| =_{p.p.} \|f\| \chi_A$ pour $A \in \Omega$ avec $\mu(A^C) > 0$.

Ex : On a $(2, 1, 0) \perp_\infty (0, 1, 2)$ sur l_3^∞.

Théorème : L^∞-projections sur $L^\infty(\Omega)$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors

$$\mathcal{P}_\infty(L_\infty(\Omega)) = \{M_{\chi_A},\ A \in \mathcal{F}\}.$$

Cette caractérisation était connue pour $l^\infty(\mathbb{N})$, l_n^∞, mais pas dans le cas général. Les idées de la preuve permettent d'obtenir un résultat similaire pour des espaces comme $c_0(\mathbb{N})$, $c_{00}(\mathbb{N})$.

Soit X un espace de Banach et $1 \leq p \leq +\infty$. On considère les propriétés suivantes.

Propriété 1 : Linéarité de la p-orthogonalité

Pour tous $f, g, h \in X$ tels que $f \perp_p g$ et $f \perp_p h$, on a $f \perp_p (g+h)$.

Propriété 2 : Extension de la p-orthogonalité à X

Pour tous $f, g \in X$ tels que $f \perp_p g$, il existe $P \in \mathcal{P}_p(X)$ tels que $P(f) = f$ et $P(g) = 0$.

Exemple

Pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2, +\infty$, $L^p(\Omega)$ vérifie les deux propriétés.

Proposition

Si X vérifie la propriété de linéarité ou d'extension de la ∞-orthogonalité, alors X possède au plus 4 L^∞-projections.
Pour $L^\infty(\Omega)$, ce n'est vrai qu'en dimension 1 ou 2.

Soit X un espace de Banach et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2$.

Proposition

Si X vérifie la Propriété 2 pour p, alors il vérifie la Propriété 1. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition : Caractérisation des L^p-projections sur un sous-espace

Si X vérifie la Propriété 2 pour p, alors pour tout sous-ev F de X, les L^p-projections sur F sont de la forme $P|_F$, pour P une L^p-projection sur X.
Si X ne vérifie pas la Propriété 2 pour p, alors il existe une L^p-projection sur un sous-ev F qui ne s'étend pas comme L^p-projection sur X.

Définition : L^p-projections maximales

Soit X un espace de Banach. Une L^p-projection maximale sur X est une L^p-projection définie sur un sous-ev de X qui ne s'étend pas sur un sous-ev plus grand comme L^p-projection.

Ex : Pour $X = Vect((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1))$ sur l^p, $M_{\chi_{\{1,2\}}}$ est une L^p-projection maximale (définie sur $Vect((1,1,0,0),(0,0,1,1))$).

Comme il est relativement facile de construire des sous-espaces de X qui n'admettent pas de L^p-projections à part 0 et I, regarder l'ensemble des L^p-projections maximales semble plus intéressant pour voir comment se comportent ces sous-espaces par rapport à la p-orthogonalité.

Si X est de dimension finie et $p \neq 2$, X possède au plus $2^{dim(X)}$ L^p-projections. Qu'en est-il pour les L^p-projections maximales ?

Remarques

(i) On peut construire une norme sur $\mathbb{C}^3$ telle que $e_3 \perp_p e_1 + e^{it} e_2$ pour une infinité non-dénombrable de $t \in \mathbb{R}$, mais pas pour tout t. Cela implique une infinité non-dénombrable de L^p-projections maximales.

(ii) Si F est un sous-ev d'un Banach X tel que X vérifie la Propriété 2 pour p, alors toute L^p-projection maximale pour F est la restriction d'une L^p-projection sur X.

Théorème

Soit X un Banach et $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2$, tel que X vérifie la Propriété 2 pour p. Soit F un sous-ev de X de dimension finie.
Alors,

$$Card(\{L^p\text{-proj maximales pour } F\}) \leq 2^{2^{\max(dim(F)-1,0)}}.$$

Un tel F a donc bien un nombre fini de L^p-projections maximales.

On s'intéresse à présent aux relations qu'il pourrait y avoir entre les L^p-projections sur un espace X et celles sur un quotient X/F. On commence par un bref rappel sur représentants de norme minimale et les projetés métriques.

Rappel : Représentant, projeté métrique

Soit F un sous-espace fermé de X.
Tout élément $\overline{x}$ du quotient X/F admet un unique représentant de norme minimale si et seulement si tout x dans X possède un unique projeté métrique sur le convexe fermé F.
On notera ce projeté $\mathrm{Proj}(x, F)$. Il vérifie :

$$\|\overline{x}\| = \inf_{a \in F}(\|x - a\|) = \|x - \mathrm{Proj}(x, F)\|.$$

Cette étude de L^p-projections entre X et X/F repose sur le lemme clé suivant.

Lemme

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 1$. Soit X un espace de Banach. Soit F un sous-espace fermé de X. Soient $x \in X$ et $P \in \mathcal{P}_p(X)$ tels que $P(x) = x$. On suppose que $x \in X$ possède au moins un projeté métrique sur F. Alors, on a les équivalences :

(i) $\inf_{a \in F} \|x - a\| = \|x - \alpha\|$, pour $\alpha \in F \cap P(F)$;

(ii) $\inf_{a \in F} \|x - a\| = \inf_{b \in P(F)} \|x - b\|$;

(iii) $\inf_{b \in P(F)} \|x - b\| = \|x - \alpha\|$, pour $\alpha \in F$.

Si les projections métriques sur F et $P(F)$ sont bien définies, on a les équivalences :

(1) $\mathrm{Proj}(x, F) \in P(F)$;

(2) $\mathrm{Proj}(x, F) = \mathrm{Proj}(x, P(F)) \in (F \cap P(F))$;

(3) $\mathrm{Proj}(x, P(F)) \in F$.

preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$, $p < +\infty$

- $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons par l'absurde que $\inf_{b\in P(F)} \|x-b\| < \|x-\alpha\|$.
Comme $\alpha \in P(F)$, on aurait ainsi $\gamma \in P(F)$ tel que $\|x-\alpha-\gamma\| < \|x-\alpha\|$.
Il existe aussi $c \in F$ tel que $P(c) = \gamma$.
On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions :
$g : t \mapsto \|x-\alpha-tP(c)\|^p$ et $h : t \mapsto \|x-\alpha-tc\|^p = g(t) + |t|^p.\|(I-P)(c)\|^p$.
Comme $p < +\infty$, pour tous $b, b' \in X$ la fonction $t \mapsto \|b+tb'\|^p$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Donc g et h sont convexes sur $\mathbb{R}$. Elles possèdent ainsi des dérivées à droite en tout point, g'_d et h'_d.
On obtiendrait alors : $g(1) = \|x-\alpha-\gamma\|^p < \|x-\alpha\|^p = g(0)$, d'où $g'_d(0) < 0$.
Vu que $p > 1$, la fonction $t \mapsto |t|^p$ a une dérivée de 0 en 0.
Ainsi, on aurait $h_d(0)' = g_d(0)' + 0 < 0$, ce qui implique que h serait strictement décroissante sur un voisinage de 0. On aurait ainsi un t dans $]0,1[$ tel que
$\|x-\alpha-tc\|^p = h(t) < h(0) = \|x-\alpha\|^p$, ce qui est impossible.
On obtient donc :

$$\inf_{b\in P(F)} \|x-b\| = \|x-\alpha\| = \inf_{a\in F} \|x-a\|.$$

Contre-exemple au lemme pour $p = 1$

Si l'on prend $X = l^1(\mathbb{C}^3)$, $M \geq 1$, $v = (0, 1, M)$, $x = (1, 1, 0)$, $F = \mathrm{Vect}(v)$, et la L^1-projection $P = M_{\chi_{\{1,2\}}}$, on a alors

$$\inf_{a \in F}(\|x - a\|) = 2 = \|x\| \text{ mais } \inf_{b \in P(F)}(\|x - b\|) = 1 < \|x\|.$$

Cela est lié au fait que la dérivée à droite en 0 de $r \mapsto |r|$ ne vaut pas 0.

Proposition : Passage au quotient de L^p-projections

Soit X un espace de Banach, et soit $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$. Soit F un sous-espace fermé de X, et soit $P \in \mathcal{P}_p(X)$ telle que $P(F) \subset F$. Alors, on a :

(i) $X/F \simeq P(X)/P(F) \oplus_p (I-P)(X)/(I-P)(F)$;

(ii) Il existe une L^p-projection P' sur X/F telle que $P'(\overline{x}) = \overline{P(x)}$;

(iii) Soit $P_F \in \mathcal{P}_p(X)$ la L^p-projection ayant la plus grande image telle que $\mathrm{Im}(P_F) \subset F$. Alors, X/F est isométriquement isomorphe à $(I-P_F)(X)/(I-P_F)(F)$.

(iv) On pose $\phi : P \in \{Q \in \mathcal{P}_p(X) : Q(F) \subset F\} \mapsto P' \in \mathcal{P}_p(X/F)$. Alors ϕ est un morphisme d'algèbres de Boole commutatives, et $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathcal{P}_p(X) \circ P_F$. Ainsi, on a $\phi(P_1) = \phi(P_2)$ si et seulement si $(I-P_F)P_1 = (I-P_F)P_2$, et ϕ est injective si et seulement si $P_F = 0$.

Propriété 3 : Remontée de la p-orthogonalité à travers un quotient

Pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in X/F$ tels que $\overline{x} \perp_p \overline{y}$, il existe des représentants $x, y \in X$ de $\overline{x}, \overline{y}$ de norme minimale tels que $x \perp_p y$.

Théorème : Caractérisation des L^p-projections sur un quotient

Soient $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$ et X un espace de Banach.
Soit F un sous-espace fermé de X tel que tout élément de X/F possède un unique représentant de norme minimale. On suppose que la Propriété 3 est vérifiée pour X,F et p et que la propriété 2 est vérifiée pour X et p. On note
$\phi : P \in \{Q \in \mathcal{P}_p(X) : Q(F) \subset F\} \mapsto \phi(P) \in \mathcal{P}_p(X/F)$ le morphisme d'algèbres de Boole commutatives de la Proposition précédente, avec $\phi(P)$ vérifiant
$\phi(P)(\overline{x}) = \overline{P(x)}$ pour tout $x \in X$. Alors, on a :

(i) Le morphisme ϕ est surjectif ; toute L^p-projection de X/F peut être associée à une L^p-projection P de X telle que $P(F) \subset F$.

(ii) L'algèbre de Boole $\mathcal{P}_p(X/F)$ est isomorphe à $\{P \in \mathcal{P}_p(X) : PP_F = 0,\ P(F) \subset F\}$.

(iii) On note P_F la L^p-projection de X de plus grande image telle que $\mathrm{Im}(P_F) \subset F$. Le quotient X/F possède des L^p-projections non triviales si et seulement s'il existe des L^p-projections P telles que $P_F < P < I$ et $P(F) \subset F$.

Exemple : Cela fonctionne pour $X = L^p(\Omega)$.

Je vous remercie pour votre attention.